Osaka University Knowledge Archive

Title	有理函数ニツイテ
Author(s)	清水, 辰次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 9 p.10-p.none
Issue Date	1934-08-31
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73863
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

26. 有理函數ニツイテ

清水辰次郎 (阪大)

全有限平面デ meromorphic ナ函數 $f(z)$ ニ對シテ

$$A_1(r,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|f'(z)|}{(1+|f(z)|^2)^2}\rho\,d\rho\,d\theta,\qquad z=\rho e^{i\theta}.$$

トオケバ

$$\int_\varepsilon^r\frac{A_1(t,f)}{t}\,dt=T(r,f)+O(1)$$

デアル。コヽニ $T(r,f)$ ハ R. Nevanlinna ガ有理型函數ノ理論ニ導入シタ函數デアル。筆者ハ数學輯報 1927, 第6巻, 第1号 129頁デ $f(z)$ ガ有理函数ナラバ $A_1(r,f)$ ガ有界トナリ, 逆ニ $A_1(r,f)$ ガ有界ナラバ $f(z)$ ガ有理函數トナルコトヲ示シタ。コノハ $T(r,f)=O(\log r)$ ガ有理函数デアルタメニ必要且十分ダトエフ Nevanlinna ノ定理ヨリ直グ出ルノダガ, 有理函数ニ對シテハ $A_1(r,f)$ ノ方ガ $T(r,f)$ ヨリ簡單ナ意味ヲモツテ居ルノダカラ直接ニ $A_1(r,f)$ ノ性質ヲ使ツテ証明スルノガ順序ダト思ハレル。

$f(z)=\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}$, ($P_1(z), P_2(z)$ ハ有理整函數) トオケバ

$$A_1(r,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|P_1'P_2-P_1P_2'|^2}{(|P_1|^2+|P_2|^2)^2}\rho\,d\rho\,d\theta\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\text{〃}\,\rho\,d\rho\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{K}{\rho^4}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$z=\rho e^{i\theta}$$

コヽニ K, r_0 ハ十分大キイ常數デアル。何者、$P_1(z), P_2(z)$ ノ次数ヲ夫々 n_1, n_2 トスレバ $n_1\neq n_2$ ナルトキハ明カニ $P_1'P_2-P_1P_2'$ ノ次数ハ $|P_1|^2+|P_2|^2$ ノ次数ヨリ少クトモ 2 低ク, $n_1=n_2$ ナルトキモ $P_1'P_2-P_1P_2'$ ノ最高次ノ項ガ消エルタメ少クトモ 2 低イ。ヨツテ r_0, K ヲ十分大キクトツテオケバヨイ。コレヨリ

$$A_1(r,f)=O(1)$$

次ニ $A_1(x,f)$ ガ有界ナラバ $f(z)$ ハ有理函数デナケレバナラヌコトヲ示サウ。假リニ $f(z)$ ガ有理函数デナイトスレバ ∞ ハ $f(z)$ ノ孤立真性特異点トナルカラ $f(z)$ ガ領域ヲ領域ニ寫像スルトイフ性質ヲ使ヘバ Weierstrass ノ定理カラ、適當ニ α_0 ヲトレバ $f(z)=\alpha_0$ ガ ∞ 近傍デ無限ニ多クノ根ヲモツヨウニスルコトガ出来ル。（例ヘバ竹内端三先生ノ岩波講座、楕円函數論 IV, 163–165頁）。モツトモ上ノコトハ Picard ノ定理カラ直グ得ラレルノダガ成ル可ク初等的ニ証明シナイト面白クナイノデ Weierstrass ノ定理ヲ使ツタノデアル。（$\alpha_0 \neq \infty$ トスルコトモデキル）

シカルニ、一方、任意ノ $\alpha\,(\neq\infty)$ ニ対シテ $L_\alpha(f)=\dfrac{|\alpha|^2 f+\alpha}{|\alpha|\,(f-\alpha)}$ トオケバ

$$\frac{|dL_\alpha(f)|}{1+|L_\alpha(f)|^2}=\frac{|\alpha|^2\,(1+|\alpha|^2)\,|df|}{|\alpha|^2\,|f-\alpha|^2+\big||\alpha|^2 f+\alpha\big|^2}$$

$$|\alpha|^2|f-\alpha|^2+\big||\alpha|^2f+\alpha\big|^2=|\alpha|^2(f-\alpha)(\bar f-\bar\alpha)+(|\alpha|^2f+\alpha)(|\alpha|^2\bar f+\bar\alpha)$$

$$=|\alpha|^2\,(1+|\alpha|^2)(1+|f|^2)$$

デアルカラ

$$\frac{|dL_\alpha(f)|}{1+|L_\alpha(f)|^2}=\frac{|df|}{1+|f|^2}\qquad\therefore\quad A_1(x,L_\alpha(f))=A_1(x,f)$$

（実ハ、L_α ハ Riemann sphere ノ上デ考ヘレバ α ニ相當スル点ヲ ∞ ニ相當スル点ヘモツテユク、球自身ノ回轉デアル）

ヨツテ筆者ノ前掲論文 123頁 Theorem I ニヨリ

$$A_1(x,f)=A_1(x,L_\alpha(f))=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\log(1+|L_\alpha(f)|^2)}{\partial x}\Bigg|_{z=xe^{i\theta}} r\,d\theta+n(x,\alpha)$$

$A_1(x,f)$ ハ beschränkt ダカラ、コレヨリ $(A_1(x,f)\leqq K)$

$$\int_{R_0}^{R}(K-n(x,\alpha))\,d\log x\geqq\left[\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log(1+|L_\alpha(f)|^2)_{z=xe^{i\theta}}\,d\theta\right]_{x=R}-\Big[\ \ ''\ \ \Big]_{x=R_0}$$

右辺ノ第一項ハ $\geqq 0$ ダカラ

$$\int_{R_0}^{R}(K-n(x,\alpha))\,d\log x\geqq C(f,\alpha,R_0)$$

$C(f,\alpha,R_0)$ ハ f,α,R_0 ノミニ関係スル常数。コヽデ $\alpha=\alpha_0$ トレバ矛盾ガオコル。$n(x,\alpha)\underset{(x)}{\uparrow}\infty$ ナラバ